УДК 514.75

H-ВИРТУАЛЬНЫЕ НОРМАЛИ ЛАПТЕВА-ОСТИАНУ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ H В $M_n(\Gamma,\Lambda)$

Б.А к м а т о в

(Ошский государственный педагогический институт)

Изучаются H-виртуальные нормали на распределении гиперплоскостных элементов H в дифференцируемом многообразии M_n в предположении, что M_n оснащено полем объекта связности Γ.

Зададим на M_n распределение m-мерных линейных элементов Λ $(m < n-1)$, определенных полем геометрического объекта $\{\Lambda^J_i\}$, именуемого структурным объектом распределения Λ. Индексы пробегают следующие значения:

$$J,K,L,\ldots = 1,2,\ldots,n; \quad i,j,k,\ldots = 1,2,\ldots,m;$$

$$\alpha,\beta,\gamma,\ldots = m+1,\ldots,n; \quad A,B,C,\ldots = 1,2,\ldots,n-1;$$

$$\epsilon,\tau,\xi,\ldots = m+1,\ldots,n-1.$$

В предыдущих исследованиях [1] нами были построены геометрический объект $\{t^J_\alpha\}$, определяющий внутренне присоединенное к распределению Λ нормально оснащающее поле, и объект $\{H^n_A\}$, определяющий на M_n поле гиперплоскостных элементов H, таких что в каждой точке $x \in M_n : \Lambda_x \subset H_x$. Построенная нормаль t по типу охвата ее структурного объекта $\{t^J_\alpha\}$ аналогична квазинормали в пространстве проективной связности, построенной в [3]. В дальнейшем мы называем ее нормалью Лаптева-Остиану. Справедливо

У т в е р ж д е н и е. Фундаментальным объектом первого порядка $\{\Lambda^J_i, \Lambda^J_{ik}\}$ распределения Λ может быть охвачен объект $\{t^J_\alpha\}$, определяющий на распределении нормально оснащающее поле.

Заметим, что этот объект определен в первой дифференциальной окрестности и, следовательно, он является геометрическим объектом наинизшего возможного дифференциального порядка.

Пусть $\{\vec{H}_A\}$ — система $n-1$ векторов, натягивающих в каждой точке $x \in M_n$ элемент H_x, т.е.

$$\vec{H}_A = H_A^J \vec{e}_J, \tag{1}$$

где

$$H_A^J = \begin{cases} H_A^B = \delta_A^B, & \text{при } J=B;\\ H_A^n = \dfrac{H_A}{H_n}, & \text{при } J=n. \end{cases}$$

Объект $\{H_A^J\}$ является структурным объектом распределения H. В работе [1] показано, что объект, определяющий поле гиперплоскостных элементов H, внутренне присоединен к распределению Λ и его структурный объект $\{H_A^J\}$ определен во второй дифференциальной окрестности.

Продолжив дифференциальные уравнения объекта $\{H_A^n\}$, получим

$$dH_{AB}^n - H_{AC}^n \Omega_B^C - H_{CB}^n \Omega_A^C + H_{AB}^n \Omega_n^n - H_B^n H_{AC}^n \omega_n^C = H_{ABL}^n \omega^L, \tag{2}$$

$$dH_{An}^n - H_{Bn}^n \Omega_A^B - H_B^n H_{An}^n \omega_n^B - H_{AB}^n \omega_n^B = H_{AnL}^n \omega^L, \tag{3}$$

где

$$\Omega_A^B = \omega_A^B + H_A^n \omega_n^B + H_{AL}^B \omega^L.$$

Можно показать, что в общем случае матрица $\|H_{AB}^n\|$ невырожденная.

Введем обозначение

$$P_{AB}^n = H_{AB}^n + H_{An}^n H_B^n. \tag{4}$$

Используя (2), (3), получим для P_{AB}^n следующие дифференциальные уравнения:

$$dP_{AB}^n - P_{CB}^n \Omega_A^C - P_{AC}^n \Omega_B^C + P_{AB}^n \Omega_n^n = P_{ABL}^n \omega^L. \tag{5}$$

Заметим, что система функций P_{AB}^n образует тензор и по построению матрица его компонент – невырожденная и, следовательно, мы можем ввести обращенный тензор $\overset{*}{P}{}_n^{CA}$:

$$P_{AB}^n \overset{*}{P}{}_n^{CA} = \delta_B^C.$$

Составим свертку

$$\ell_n^A = -\overset{*}{P}{}_n^{AC} H_{Cn}^n. \tag{6}$$

Дифференциальные уравнения поля функций ℓ_n^A имеют вид

$$d\ell_n^A + \ell_n^C \Omega_C^A - \ell_n^A \Omega_n^n + \omega_n^A = \ell_{nL}^A \omega^L. \tag{7}$$

Функции ℓ_n^A, $\ell_n^n = \delta_n^n$, H_B образуют геометрический объект, определяющий на M_n поле нормалей распределения H, внутренне присоединенное к распределению – обобщенную нормаль Э.Д.Алшибая в многообразии M_n.

В каждой точке $x \in M_n$ элемент t_x поля t, нормально оснащающего распределения Λ, пересекает соответствующий элемент распределения H по $(n-m-1)$-мерному подпространству. Поле таких подпространств определено полем объекта $\{\bar{t}_\sigma^J\}$ [1]. Это поле можно интерпретировать как поле H-виртуальных нормалей Лаптева-Остиану u распределения Λ, используя способ, аналогичный примененному при построении нормали t [1]. Для этого мы введем m линейно независимых векторов

$$\vec{h}_j \overset{def}{=} \vec{e}_j + h_j^\alpha \vec{e}_\alpha,$$

где

$$h_j^\alpha \overset{def}{=} A_j^k \Lambda_k^\alpha, \quad A_j^k \Lambda_k^i = \delta_j^i.$$

Для упрощения построений мы введем репер, адаптированный распределению H ($\vec{e}_A \in H_x$). Воспользовавшись леммой о канонизации репера Н.М.Остиану [2], приведем H_A^n к нулевым значениям. Тогда условие $\Lambda_x \subset H_x$ принимает вид:

$$h_i^n = 0. \tag{8}$$

Теперь из дифференциальных уравнений h_i^α с учетом (8) получим

$$\overset{\omega}{\nabla} h_i^\tau - h_k^\tau h_i^\sigma \omega_\sigma^k + \omega_i^\tau = h_{iL}^\tau \omega^L, \tag{9}$$

где

$$\overset{\omega}{\nabla} h_i^\sigma = dh_i^\sigma - h_k^\sigma \omega_i^k + h_i^\tau \omega_\tau^\sigma.$$

Следовательно, функции h_i^σ образуют самостоятельный объект. Продолжив уравнения (9), с учетом канонизации репера получим дифференциальные уравнения для функций $h_{ij}^n, h_{i\sigma}^n$:

$$\overset{\omega}{\nabla} h_{ij}^n - h_{i\sigma}^n \omega_j^\sigma - h_i^\tau h_{kj}^n \omega_\tau^k = h_{ijL}^n \omega^L, \tag{10}$$

$$\overset{\omega}{\nabla} h_{i\sigma}^n - h_i^\tau h_{k\sigma}^n \omega_\tau^k - h_{ik}^n \omega_\sigma^k = h_{i\sigma L}^n \omega^L \tag{11}$$

Используя построения, аналогичные примененным при построении нормали t, мы строим охват объекта с компонентами u_σ^k:

$$u_\sigma^k = -\bar{h}_{\ell\sigma}^\tau V_\tau^{\ell i} \overset{*}{m}{}_i^k, \tag{12}$$

где

$$\bar{h}_{\ell\sigma}^\tau = h_{\ell\sigma}^\tau - h_{\ell\sigma}^n \ell_n^\tau + h_\ell^\tau \ell_n^i h_{i\sigma}^n,$$

$V_\tau^{\ell i}$ – обращенный объект для объекта Λ, а $\overset{*}{m}{}_i^k$ – невырожденный тензор [1].

Введем обозначение

$$u_\sigma^A = \begin{cases} u_\sigma^\tau = \delta_\sigma^\tau + h_k^\tau \omega_\sigma^k & \text{при } A=\tau;\\ u_\sigma^k = -\bar{h}_{\ell\sigma}^\tau V_\tau^{\ell i} \overset{*}{m}{}_i^k & \text{при } A=k. \end{cases} \tag{13}$$

Объект $\mathcal{U}=\{u^{\Lambda}_{\sigma}\}$ является геометрическим объектом, определяющим H-виртуальную нормаль Лаптева-Остиану распределения Λ. Этот объект внутренне присоединен к распределению Λ. Он охвачен фундаментальным объектом третьего порядка распределения Λ. Нормаль $\mathcal{U}$ ассоциирована нормально оснащающему полю нормалей ℓ, ибо при построении охвата объекта $\mathcal{U}$ использован структурный объект ℓ. Сравнивая строение компонент объектов $u=\{u^{\Lambda}_{\sigma}\}$ и $\bar{t}=\{\bar{t}^{\Lambda}_{\sigma}\}$ H-виртуальных нормалей для распределения Λ, устанавливаем, что в каждой точке $x\in M_n$ элементы H-виртуальных нормалей $\mathcal{U}$ и $\bar{t}$ совпадают. Справедлива

Т е о р е м а. В каждой точке $x\in M_n$ пересечение нормали Лаптева-Остиану распределения Λ с соответствующими элементами распределения H является H-виртуальной нормалью Лаптева-Остиану этого распределения Λ.

Библиографический список

I. А к м а т о в Б. Об инвариантном построении геометрии распределений m-мерных линейных элементов в дифференцируемом многообразии M_n / МГПИ. М., I983. 34 с. Деп в ВИНИТИ 26.05.83, № 2874-83.

2. О с т и а н у Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures. et appl. (R.P.R.) I962. V.7. № 22. С. 23I-240.

3. О с т и а н у Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., I97I. Т.3. С. 95-II4.

УДК 5I4.76

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МЕТРИК НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ, СВЯЗАННЫХ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПОЛИСИСТЕМАМИ

С.И.А л е ш н и к о в

(Калининградский государственный университет)

Пусть V -связное компактное многообразие класса C^{∞} размерности N, на котором определены полные попарно коммутирующие векторные поля X_i $(1\leq i\leq N)$ класса C^{∞}, такие, что для любой точки $a\in V$ векторы $X_1(a),\dots,X_N(a)$ линейно независимы в касательном пространстве $T_a(V)$, g - риманова метрика, δ - расстояние на V, описанные в [1]. С точки зрения некоторых приложений представляет интерес "локально-глобальная" структура расстояния δ. Используем обозначения [1].

П р е д л о ж е н и е I. Пусть (x_n) и (y_n) - последовательности точек из V, $x_n\to x, y_n\to y$ при $n\to\infty$. Тогда существуют подпоследовательности $(x_\ell)\subset(x_n)$ и $(y_\ell)\subset(y_n)$ и последовательность $c_\ell\in\mathfrak{I}(x_\ell,y_\ell)$, такие, что $J(c_\ell)=\delta(x_\ell,y_\ell)$ и c_ℓ сходится равномерно относительно метрики δ к некоторой функции $\mathfrak{I}(x,y)$ такой, что $J(c)=\delta(x,y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть

$$f_n: T^{(n)}\to V,\quad f_n^{(1)}: T_1^{(n)}\to V,\quad f_n^{(2)}: T_2^{(n)}\to V$$

такие функции из $\mathfrak{I}(x_n,y_n)$, $\mathfrak{I}(x,x_n)$, $\mathfrak{I}(y,y_n)$ соответственно, что $J(f_n)=\delta(x_n,y_n)$, $J(f_n^{(1)})=\delta(x,x_n)$, $J(f_n^{(2)})=\delta(y,y_n)$, $L^{(n)}$, $L_1^{(n)}$, $L_2^{(n)}$ - длины интервалов $T^{(n)}, T_1^{(n)}, T_2^{(n)}$ соответственно. Положим:

$$\bar{f}_n(t)=\begin{cases} f_n^{(1)}(t), & 0\leq t< L_1^{(n)};\\ f_n(t-L_1^{(n)}), & L_1^{(n)}\leq t< L_1^{(n)}+L^{(n)};\\ f_n^{(2)}(t-L_1^{(n)}-L^{(n)}), & L_1^{(n)}+L^{(n)}\leq t\leq L_1^{(n)}+L^{(n)}+L_2^{(n)}.\end{cases}$$

Легко видеть, что $\bar{f}_n\in\mathfrak{I}(x,y)$ при любом n и $\lim_{n\to\infty}J(\bar{f}_n)=\delta(x,y)$. Согласно [1] можно исправить последовательность $(\bar{f}_n)$ так, чтобы получить новую последовательность (h_n), у которой $J(h_n)\leq J(f_n)$, множество $\nu(h_n)$ ограничено, $h_n\in\mathfrak{I}(x,y)$, $\lim_{n\to\infty}J(h_n)=\delta(x,y)$, $h_n(t_n')=x_n$, $h_n(t_n'')=y_n$ для некоторых t_n' и t_n'', $J(h_n|[t_n',t_n''])=\delta(x_n,y_n)$. Из последовательности (h_n) можно выбрать подпоследовательность $(h_\ell)\subset(h_n)$, которая равномерно относительно δ сходится к функции $c\in\mathfrak{I}(x,y)$ такой, что $J(c)=\delta(x,y)$ и $\nu(c)=\nu(h_\ell)=\nu_0$ при всех ℓ.

2) Обозначим теперь $c_\ell=h_\ell|[t_\ell',t_\ell'']$. Легко видеть, что

$$c_\ell\in\mathfrak{I}(x_\ell,y_\ell),\qquad \lim_{\ell\to\infty}J(c_\ell)=\delta(x,y).$$

Делая линейную замену переменных, можно считать, что $t_\ell'=0$ при всех ℓ. Тогда, исходя из равномерной сходимости h_ℓ к c и равномерной непрерывности c, легко видеть, что c_ℓ равномерно сходится к c на любом промежутке $[0,\beta]$, где $0<\beta<t_{\nu_0}$, $c(t_{\nu_0})=y$. Продолжим c_ℓ для $t\geq t_\ell''$, положив $c_\ell(t)=y_\ell$, и продолжим c для $t\geq t_{\nu_0}$, положив $c(t)=y$. Легко убедиться при этом, что c_ℓ сходится равномерно к c